تقریب عدد π به کمک احتمال

مرتضی بیات، عضو هیئت علمی دانشکده ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنجان
زهرا خاتمی، دبیر ریاضی دبیرستان‌های زنجان و کارشناس ارشد ریاضی

در «عهد عتیق» روایت شده است که حضرت سلیمان (ع)، دستور داد جامی برای او بسازند که قطر دهانه آن، ۱۰ آرنج و محیط آن ۳۰ آرنج باشد (کتاب مقدس تورات، آیه بیست و سوم، باب هفتم). آیا چنین چیزی ممکن است؟ اگر قطر دایره را برابر ۱۰ بگیریم، محیط آن برابر ۳۰ می‌شود؟ آیا نسبت طول محیط دایره بر قطر آن برابر با ۳ است؟

چکیده

در مطالعه طبیعت، به اشکال زیبای فراوانی برخورد می‌کنیم، ولی شکل دایره زیبایی دیگری دارد. دایره متقارن‌ترین شکل مسطح و کره متقارن‌ترین شکل فضایی است و طبیعت پر است از تقارن‌ها! پس دایره و کُره، زیباترین زیبایان هستند و برای شناختِ راز این زیبایی، باید قانون‌های حاکم بر آن‌ها را کشف کرد.

چگونه مسیر ظاهری حرکت ستارگان محاسبه می‌شود؟ چطور می‌توان گنجایش یک ظرف گرد را به‌دست آورد؟ و سؤال‌هایی از این قبیل که همه به یک پرسش منجر می‌شوند که «به چه ترتیب می‌توان محیط یک دایره را به کمک طول شعاع آن به‌دست آورد»؟ در این مقاله، پس از یک مرور تاریخی مربوط به عدد π، به طرح چند مثال برای تقریب عدد π به کمک احتمال هندسی می‌پردازیم.

کلیدواژه‌ها: محیط دایره، چندضلعی‌های منتظم، عدد π، تقریب مقدار π، احتمال هندسی، سوزن بوفون

۱. مروری بر سیر تاریخی تقریب عدد π

در سرزمین باستانی بابل، هوشمندان زیرک هم‌عصر حضرت سلیمان (ع) که به کار «محاسبه» می‌پرداختند، محیط دایره را با محیط شش‌ضلعی منتظمِ محاط در آن برابر می‌گرفتند و به همین مناسبت، نسبت محیط دایره به قطر آن را که امروز π نامیده می‌شود، برابر ۳ به‌دست می‌آوردند.

رومیان قدیم نیز با محاسبه‌های تجربی و شاید با کشیدن نخی به دور دایره و سپس اندازه‌گیری طول نخ، عدد ۳/۱۲ را برای عدد π به‌دست آوردند و حسابگران اعجوبه مصری، محیط دایره را برابر با محیط مربعی می‌دانستند که قطر آن برابر با $\frac{۸}{۹}$ قطر دایره باشد و بدین ترتیب، به عدد تقریبی ۳/۱۶ برای π، می‌رسیدند.

شاید بتوان ارشمیدس را نخستین کسی دانست که با ذهن پرنبوغ خود، توانست روشی منطقی و ریاضی برای محاسبه عدد π بیابد، بدین ترتیب که هم شش‌ضلعیِ محاطی و هم شش‌ضلعیِ منتظمِ محیطی را در نظر گرفت و به‌طور طبیعی، طول محیط دایره را عددی بین محیط‌های این دو شش‌ضلعی به حساب آورد. پس از آن به جای شش‌ضلعی‌ها، دوازده‌ضلعی‌ها، بیست و چهارضلعی‌ها و . . . را در نظر گرفت و برای عدد π، تقریب خوب $۳\frac{۱}{۷}$ را به‌دست آورد. پس از وی، محمدبن موسی خوارزمی در سده سوم هجری، نوشت که برای محاسبه محیط دایره، «بهترین روش این است که قطر دایره را در $۳\frac{۱}{۷}$ ضرب کنیم».

همچنین، غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضی‌دان بزرگ ایرانی که در اواخر سده چهاردهم و اوایل سده پانزدهم میلادی می‌زیست، در کتاب «رسالة المحیطیه» خود، برای تقریب π، از شش‌ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی آغاز نمود. بعد دوازده‌ضلعی، بیست و چهارضلعی و . . . را در نظر گرفت و هر بار، محیط دایره را برابر واسطه عددی محیط‌های ۳×۲^n ضلعیِ محاطی و ۳×۲^n ضلعیِ محیطی به حساب آورد تا سرانجام، به ازای $n=۲^{۲۴}$ یعنی ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی، مقدار π را تا ۱۶ رقم درست بعد از ممیز به‌دست آورد (قربانی، ۱۳۶۳ و قربانی، ۱۳۶۸):

$$\pi \approx ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۸۹۷۹۳۲$$

غیاث‌الدین جمشید کاشانی در مقدمه این کتاب، با ظرافت به گنگ بودن عدد π و دقت تقریب خود پرداخته و می‌نویسد:

«ستایش خداوندی را سزد که از نسبت قطر به محیط دایره آگاه است... خواستیم محیط دایره را به فرض معلوم بودن قطر آن بر حسب واحد معینی استخراج کنیم که بر ما یقین حاصل شود که در دایره‌ای که قطرش ششصد هزار برابر قطر زمین باشد، تفاوت بین نتیجهٔ حساب ما و آن‌چه حق است به یک مو نرسد، مویی که ضخامتش یک ششم عرض یک دانهٔ جو متوسط است...»

در ادامه باید گفته شود که تقریب کاشانی از عدد π تا حدود سیصد سال بعد از او، تقریب منحصربه‌فردی بود که در آن، شاهکار این محاسبه، به اوج خود رسیده بود (برای آشنایی مبسوط با سیر تحول تاریخیِ عدد π به ایوز، ۱۹۹۰، چاپ ششم و قربانی، ۱۳۶۸ مراجعه کنید.)

۲. تقریب عدد π به کمک احتمال

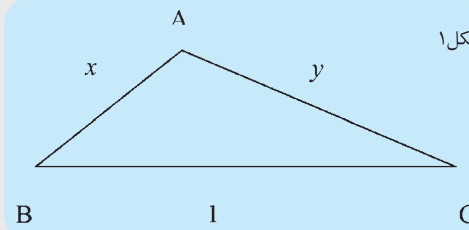
معمولاً حضور عدد π در روابط ریاضی، دلالت آشکار بر این دارد که به نحوی، بایستی ردپای دایره را در این مسئله جست‌وجو کنیم. در ادامه، چند مثال را در زمینه احتمالات هندسی که عدد π در آن ظاهر می‌گردد، ارائه می‌دهیم و سپس به کمک آن، تقریبی از عدد π به‌دست می‌آوریم.

مثال ۱. اگر دو عدد x و y که هر دو کوچک‌تر از ۱ هستند، به تصادف انتخاب و نوشته شوند، احتمال اینکه با عدد۱، یک سه تایی $(x,y,1)$ از اعداد به‌دست آیدکه اضلاع مثلثی با زاویه منفرجه باشند، برابر با $\frac{\pi-۲}{۴}$ است.

حل. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که هر جفت از اعداد x و y نقطه‌ای مانند (x,y) را در مربع واحد مشخص می‌کنند. حال چون هر یک از مختصات به تصادف، از یک بازه واحد انتخاب می‌شوند، احتمال قرار گرفتن نقطه متناظر (x,y) در هر جای مربع، یکی است. به بیان دقیق‌تر، احتمال اینکه (x,y) در داخل ناحیه‌ای مانند G از مربع قرار گیرد، برابر با نسبت مساحت G به مساحت کل مربع است و

چون مســاحت مربع مساوی با ۱ است، احتمال قرار گرفتن(x,y) در G، برابر با مساحت G است.

شکل۱



اینک، مثلثی به اضلاع $x,y,۱$ را در نظر می‌گیریم (شــکل۱). چون x و y کوچک‌تر از ۱ هســتند، پس زاویه A بایســتی منفرجه باشــد. حال بــرای اینکه طول‌های x، y و ۱، تشکیل یک مثلث بدهند، مجموع هر دوی آن‌ها باید بیشــتر از سومی باشد. پس شرط اینکه مثلثی تشکیل شود این است که

$$x+y>۱ \qquad (۱)$$

(البتــه نامســاوی‌های $x+۱>y$ و $y+۱>x$ را نیز داریم، ولی ناحیه‌هایی که توســط این نامســاوی‌ها مشخص می‌شــوند، تنها در یک نقطه با مربع واحد، اشتراک دارند.)

از این گذشته، چون زاویه A منفرجه است، پس $\cos(A)<۰$. بنابراین، طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$۱^۲ = x^۲ + y^۲ - ۲xy.\cos(A)$$

یا

$$x^۲ + y^۲ = ۱ + ۲xy.\cos(A) < ۱$$

و در نتیجه؛

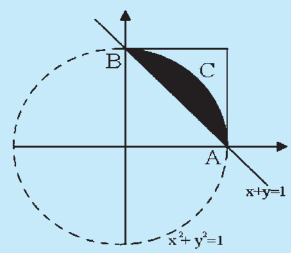
$$x^۲+y^۲<۱ \qquad (۲)$$

بدین ترتیب، نقاط (x,y) ای که در نامساوی (۱) صدق می‌کنند، در بالای قطر AB از مربع واحد قرار دارند (شــکل ۲) و نقاطی که در نابرابری (۲) صدق می‌کنند، در داخل دایره واحد قرار دارند. پس نقاطی که هم در نامســاوی (۱) و هم نامســاوی (۲) صدق می‌کنند، در ناحیه ســیاه‌رنگ، بین ربع دایره و قطر قرار دارند. در نتیجه، احتمال اینکه $(x,y,۱)$ مثلثی با زاویه منفرجه به دست دهد، عبارت است از:

(مساحت مثلث AOB) – (مساحت ربع دایره AOB) = (مساحت قطعه ABC)

$$= \frac{۱}{۴}\pi(۱)^۲ - \frac{۱}{۲}(۱)(۱) = \frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{\pi-۲}{۴}$$

شکل۲



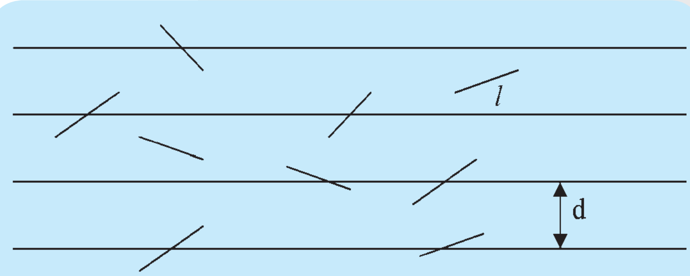
توضیـــح: بــرای تقریب عــدد π در این حالت، فــرض کنیم مربع واحد را به وســیله «دارت»، مورد هدف قرار می‌دهیــم. تصور کنید اگر به تعداد N بار پرتاب صورت گرفته باشــد، n پرتــاب آن در ناحیه سیاه‌رنگ خورده شده است (شکل ۲). در این‌صورت، احتمال برخورد برابر$\frac{n}{N}$ ست. یعنی؛

$$\frac{\pi-۲}{۴} \approx \frac{n}{N} \Rightarrow \pi \approx \frac{۴n}{N}+۲$$

که همان «روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو» است. به‌عنوان مثال، فرض کنیم اگر$N=۳۵$ و $n=۱۰$ باشد، در این‌صــورت مقدار تقریبی $\pi \approx ۳/۱۴۲$ به‌دســت می‌آید.

حال به مثال دیگری در ارتباط با احتمال و عدد π می‌پردازیــم، اگرچه ظهور عدد π در این مســئله، واقعاً دور از ذهن به نظر می‌رســد. این مســئله برای اولین بار در سال ۱۷۷۷، برای بوفون مطرح شد.

مثــال ۲ (ســوزن بوفون): اگر یک ســوزن به طول l بر روی کاغذ خط‌کشــی شــده‌ای که فاصله خطــوط آن برابر با d $(l \leq d)$ اســت انداخته شــود، احتمال اینکه سوزن در شرایطی قرار بگیرد که یکی از این خطوط را قطع کند، برابر با $p = \frac{۲}{\pi} \times \frac{l}{d}$ است.



شکل۳.
سوزن‌هایی به طول l که بر روی خطوط موازی با فاصله d افتاده‌اند.

مسئله سوزن بوفون با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال قابل حل است (فرشی،۱۳۸۲). با استفاده از این روش، مسئله سوزن بوفون را می‌توان برای سوزن‌های بزرگ‌تر هم حل کرد. اما راه‌حلی که در اینجا به آن می‌پردازیم، توسط ا. باربیر در سال ۱۸۶۰ ارائه شده است که در آن، به هیچ ابزاری از حساب دیفرانسیل و انتگرال نیاز ندارد و تنها از سوزن‌های متفاوت استفاده می‌شود.

راه‌حل باربیر: اگر شما سوزنی کوتاه یا بلند به طول l بیندازید، تعداد نقاط تقاطع برابر است با

$$E[l] = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots$$

(احتمال اینکه سوزن بر خط مماس شود یا سوزن بر روی خط قرار گیرد، صفر است و به این دلیل در بحث ما، این حالت نادیده گرفته می‌شود). از طرف دیگر، اگر طول سوزن کوتاه‌تر از یک باشد ($l \le d$)، احتمال بیش از یک برخورد، صفر است. یعنی؛

$$p_2 = p_3 = \dots$$

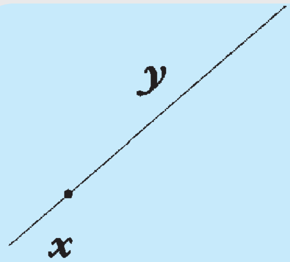
بنابراین، $E[l] = p$. احتمالی که به دنبال آن هستیم، فقط تعداد نقاط برخورد است. در ادامه، با توجه به خاصیت خطی بودن امید ریاضی، به حل این مسئله می‌پردازیم.

حال $E[l]$ را برای تعداد مورد انتظارِ نقاط تقاطع که با انداختن یک سوزن راست به طول l ایجاد می‌شود، به کار می‌بریم. اگر این طول $l=x+y$ باشد و فرض کنیم قسمت جلو دارای طول x و قسمت عقب دارای طول y از سوزن به صورت مجزا باشد، داریم (شکل ۴):

$$E[x+y] = E[x] + E[y] \qquad (۳)$$

که این نقاط تقاطع، به وسیله قسمت‌های جلو و عقب، تولید می‌شوند.

به استقراء روی n، از این معادله تابعی (۳)



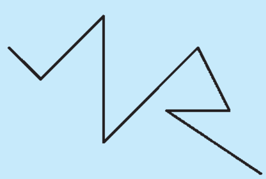
شکل ۴.
سوزن را به دو قسمت با طول‌های x و y تقسیم می‌کنیم.

نتیجه می‌شود که برای هر عدد طبیعی n داریم $E[nx] = nE[x]$. از آنجایی که

$$mE\left[\frac{m}{n}x\right] = E\left[m \times \frac{n}{m}x\right] = E[mx] = nE[x]$$

در نتیجه برای هر عدد گویای r داریم $E[rx] = rE[x]$. به‌علاوه، چون برای $x \ge 0$، تابع $E[x]$ پیوسته است، پس $E[x] = cx$ که در آن، $E[l] = c$ مقدار ثابتی است.

حال به تعمیم این مسئله می‌پردازیم که در آن، سوزنِ با مجموع طول l را که مرکب از خطوط شکسته است، می‌اندازیم (شکل ۵). در این حالت، تعداد نقاط تقاطعِ ایجاد شده برابر با مجموع نقاط تقاطع به وجود آمده به وسیله خطوط شکسته است.

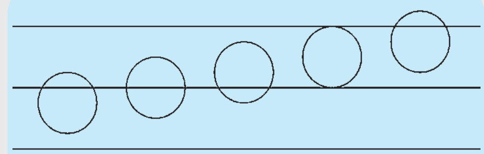

شکل ۵.
سوزن به‌صورت خطوط شکسته در نظر گرفته می‌شود.

بنابراین، با توجه به خطی بودن امید ریاضی، تعداد نقاط تقاطع برابر است با

$$E[l] = cl$$

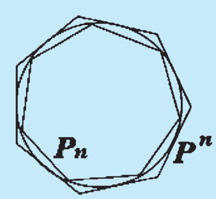
نکته اصلی در این راه‌حل برای مسئله سوزن بوفون این است که برای محاسبه ثابت c، او سوزن دیگری را به صورت دایره‌ای با قطر d فرض کرد که

در آن، $x = d\pi$ کــه اگــر مثل یک ســوزن روی یک صفحه خط‌کشــی شده انداخته شود، دقیقاً دو نقطه برخورد خواهد داشــت. بدین گونه، دایره می‌تواند با چند ضلعی‌های منتظم تقریب زده شود (شکل ۶).



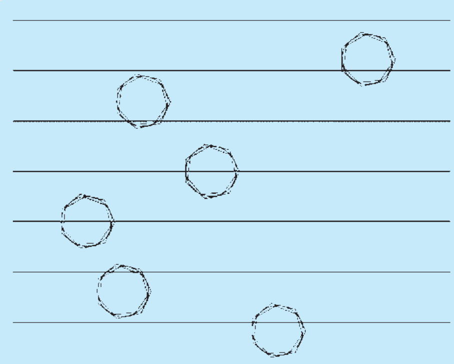
شکل ۶.
سوزن را به‌صورت دایره فرض کرده و روی خطوط موازی می‌اندازیم.

بــه عــلاوه، فــرض کنیم که ســوزن مــدور l را کــه می‌اندازیــم، یــک چندضلعی P_n محــاط و یک چندضلعی P^n، محیط می‌شود:



شکل ۷.
چنــد ضلعی P^n را به دایره محیط و چندضلعی P_n را به دایره محاط می‌کنیم.

هر خطی که P_n را قطع کند، دایره C را هم قطع خواهد کرد و اگر خطــی دایره C را قطع کند، با P^n نیز برخورد خواهد داشت (شکل ۸).



شکل ۸.

شاید بتوان ارشمیدس را نخستین کسی دانست که با ذهن پرنبوغ خود، توانست روشی منطقی و ریاضی برای محاسبه عدد π بیابد، بدین ترتیب که هم شش‌ضلعیِ محاطی و هم شش‌ضلعیِ منتظمِ محیطی را در نظر گرفت و به‌طور طبیعی، طول محیط دایره را عددی بین محیط‌های این دو شش‌ضلعی به حساب آورد

بدیــن ترتیب، تعداد نقاط تقاطــعِ مورد نظر، در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$E[P_n] < E[C] < E[P^n] \qquad (۴)$$

چــون P^n و P_n چندضلعــی هســتند، پس تعداد نقاط تقاطعی کــه برای هر دو انتظار داریم، c ضرب در محیــط آن چندضلعی‌هاســت، در حالی‌که برای دایره C، این تعداد ۲ است که از آنجا؛

$$cL(P_n) < ۲ < cL(P^n)$$

وقتی $n \to \infty$ میــل کنــد، P^n و P_n بــه دایره C نزدیک‌تر می‌شوند. در این حالت خاص، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n) = d\pi = \lim_{n\to\infty} L(P^n)$$

مثلاً برای $n \to \infty$ ، از (۴) نتیجه می‌شود که؛

$$cd\pi \le ۲ \le cd\pi$$

که از آن هم رابطه $c = \frac{۲}{\pi} \times \frac{۱}{d}$ به‌دســت می‌آید.

از طرفی، چون $E(l)=cl$، خواهیم داشت؛

$$E(l) = \frac{۲}{\pi} \times \frac{l}{d}$$

امــا در حالتی که ســوزن کوتاه باشــد، $E[l]=p$ خواهد بود و داریم

$$p = \frac{۲}{\pi} \times \frac{l}{d}$$

توضیح: یکی از نتایج این آزمایش، تقریب عدد π اســت. اگر ســوزن را N بار بیندازیم و در n حالت، ســوزن خطوط را قطع کند، در این صورت $\frac{n}{N} \approx \frac{۲l}{\pi d}$. آن‌گاه $\pi \approx \frac{۲lN}{nd}$.

شــاید کامل‌تریــن آزمایش توســط لازارینی در ســال ۱۹۰۱ انجام شده باشــد. او حتی ادعا کرد که اگر ماشــینی بسازد که توســط آن، بتواند یک عصا را ۳۴۰۸ دفعــه بینــدازد، در آن صورت $\frac{l}{d}=\frac{۵}{۶}$. او دریافت که آن عصا، خط را ۱۸۰۸ بار قطع می‌کند. در این صورت؛

$$\pi \approx ۲\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۳۴۰۸}{۱۸۰۸}=۳/۱۴۱۵۹۲۹$$

که در آن، مقدار تقریبی عدد π، تا شش رقم بعد از ممیز درست است.

حالت خاص. اگر $l=۳$ و $d=\pi$ باشد، در آن صورت $p=\frac{۶}{\pi^۲}$.

۳. چند مسئله برای تحقیق

در ادامه، دو مســئله از احتمــال را که در آن‌ها عددπ ظاهر شده اســت، بیان می‌کنیم و از خواننده تیزبیــن می‌خواهیم به نحوی در اســتدلال خود، رد پــای دایــره را تعقیب کند. قابل ذکر اســت که حل مسائل زیر به روش‌های متفاوت، در یاگلوم و یاگلوم (۱۹۶۴) و هانسبرگر (؟) آمده است.

مســئله ۱ (قضیــه بوفون-لاپــلاس): اگر دو مجموعه خطوط متعامدِ هم‌فاصله داشــته باشــیم، به طوری‌که فاصلــه خطوط یک مجموعه a و فاصله خطوط مجموعه دیگر b باشد، آن‌گاه p یعنی احتمال اینکه ســوزنی به طول l < a,b که به تصادف پرتاب شده، بر روی یکی از خطوط بیفتد، برابر است با

$$p=\frac{۲l(a+b)-l^۲}{\pi ab}$$

مســئله ۲. احتمال اینکه دو عدد صحیح مثبت کــه به تصادف انتخاب شــده‌اند، نســبت به هم اول باشند، $p=\frac{۶}{\pi^۲}$ است.

توضیح. در ابتدا این مســئله توسط چارتزر در حدود سال ۱۹۰۴ در کلاس درسش، به‌صورت کاملاً تجربی مورد آزمایش قــرار گرفت، به این ترتیب که وی، بــه هر یــک از پنجاه دانش‌آمــوز کلاس گفت: «پنج جفت عــدد صحیح مثبــت را به‌طور تصادفی بنویســید». از بیــن ۲۵۰ جفت عددی کــه به این صورت به‌دســت آمد، ۱۵۴ جفت نســبت به هم اول بودند و احتمال برابر $\frac{۱۵۴}{۲۵۰}$ بود. او این نســبت را برابر $\frac{۶}{x^۲}$ گرفت و به‌دست آورد x=۳/۱۴.

منابع

1. L. Brqqren, L.; Borwein, J.; &Borwein, P. (2004). **Pi: A Source Book (3rd Ed.)**. Spinger-Verlag.
2. M. Aigner, M. & Ziegler, G. M. (2001). **Proofs from THE BOOK** (2nd Ed.). Spinger-Verlag.
3.Yaglom, A. M. and Yaglom, I. M. (1964). Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions. Vol. I, Holden-Day, San Francisco, 1964.

۴. هانسبرگر، راس. (سال؟). **ابتکارهایی در ریاضیات**. ترجمه سیامک کاظمی (۱۳۷۱)، مرکز نشر دانشگاهی.

۵. ایــوز، هوارد. و. (۱۹۹۰، چاپ ششــم). **آشــنایی با تاریخ ریاضیــات**. ترجمــه محمد قاســم وحیدی اصل، مرکز نشــر دانشگاهی.

۶. فرشــی، مهدی. (۱۳۸۲). مسئله سوزن بوفون. **مجله رشد آموزش ریاضی**، شماره ۷۴، صص. ۳۵ تا ۳۹، **دفتر انتشارات و تکنولــوژی آموزشــی**، ســازمان پژوهــش و برنامه‌ریــزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۷. پیری، مریم؛ جوادی، شــهلا و ترابی، مریم. (۱۳۸۴). مسئله ســوزن بوفون. **ریاضیات پویا**، شــماره ۷، صص ۲-۸. سازمان ملی پرورش اســتعدادهای درخشــان، مرکز آموزشی فرزانگان زنجان.

۸. شــهریاری، پرویــز و جعفــری، ســیامک. (۱۳۸۱). **تثلیث زاویه، تربیع دایره: (کتاب کوچک ریاضی، ۲۶)**. انتشارات مدرسه برهان.

۹. قربانی، ابوالقاسم. (۱۳۶۸). بررسی رساله وتر و جیب؛ تألیف غیاث‌الدین جمشــید کاشــانی. **آشــنایی با ریاضیــات**، جلد نوزدهم، صص. ۸۶ تا ۱۰۸.خرداد ماه ۱۳۶۸.

۱۰. قربانی، ابوالقاســم. (۱۳۶۳). سیری در رساله «محیطیه»، تألیف کاشانی. **آشــتی با ریاضیات**، جلد سوم، صص. ۲۶۵ تا ۲۸۸. مرداد ماه ۱۳۶۳.